

Ανισώσεις με ορισμένα ολοκληρώματα

8°

Μ
Α
Θ
Η
Μ
Α

Για να αποδείξουμε ανισώσεις που περιέχουν ολοκληρώματα χρησιμοποιούμε τα παρακάτω. Τα δύο πρώτα τα χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη ενώ τα άλλα δύο πρέπει να τα αποδεικνύουμε, γι' αυτό και δίνουμε την απόδειξή τους.

☀ Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$, για

κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ (Το αντίστροφο δεν ισχύει).

☀ Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, $f(x) \geq 0$ για

κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$$

☀ Αν οι f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq g(x)$ για

κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

Απόδειξη:

Είναι $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$ οπότε θα είναι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

☀ Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$,

τότε $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$

Απόδειξη:

Είναι $m \leq f(x) \leq M \Leftrightarrow f(x) - m \geq 0$ και $M - f(x) \geq 0$ οπότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - m]dx \geq 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} m dx \geq 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq m[x]_{\alpha}^{\beta} \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq m(\beta - \alpha)$$

$$\text{και } \int_{\alpha}^{\beta} [M - f(x)]dx \geq 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} M dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0 \Rightarrow M[x]_{\alpha}^{\beta} \geq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(\beta - \alpha) \geq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Επίσης έχουμε αποδείξει στη σελίδα 83 ότι:

☀ Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Απόδειξη ανισώσεων

3.5.1. Να αποδείξετε ότι $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\eta\mu x) dx < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$

Είναι $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$
 (με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$)
 οπότε αφού $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι
 και $\ln(\eta\mu x) \leq \eta\mu x - 1 \Leftrightarrow \eta\mu x - 1 - \ln(\eta\mu x) \geq 0$
 με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Άρα } \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\eta\mu x - 1 - \ln(\eta\mu x)) dx > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\eta\mu x - 1) dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\eta\mu x) dx > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\eta\mu x) dx < \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\eta\mu x - 1) dx \Rightarrow \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\eta\mu x) dx < [-\sigma\upsilon\nu x - x]_{\pi/4}^{\pi/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\eta\mu x) dx < \left(-\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\eta\mu x) dx < -\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\eta\mu x) dx < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$

ΜΕΘΟΛΟΣ

Χρησιμοποιούμε την βασική
 ανίσωση:

$\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$.

Υπενθυμίζουμε τις βασικές
 ανισώσεις:

✦ $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

με την ισότητα να ισχύει μόνο
 για $x = 0$

✦ $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$

✦ $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3.5.2. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx \geq \frac{\pi}{4}$

$$\text{Είναι } 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + \sin^2 x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\sin^2 x + 1} \geq \frac{1}{2}$$

Έτσι $\frac{1}{\sin^2 x + 1} - \frac{1}{2} \geq 0$ κι επομένως

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1+\sin^2 x} - \frac{1}{2} \right) dx \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx \geq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx \geq \left[\frac{1}{2} x \right]_0^{\pi/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx \geq \frac{\pi}{4}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την πρόταση:

$$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

αφού πρώτα την αποδείξουμε.

3.5.3. Να αποδείξετε ότι: $\ln(e-1) \leq (e-1) \int_{e-1}^e \frac{\ln x}{x} dx \leq 1 - \frac{1}{e}$

$$\text{Θεωρούμε } f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ στο } [e-1, e]. \text{ Είναι } f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Έχουμε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow \ln e > \ln x \Leftrightarrow x < e$ που ισχύει στο $(e-1, e)$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e-1, e]$ και θα έχει ελάχιστο το

$$m = f(e-1) = \frac{\ln(e-1)}{e-1} \text{ και μέγιστο το } M = f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

$$\text{Έτσι } \frac{\ln(e-1)}{e-1} \leq f(x) \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \frac{\ln(e-1)}{e-1} \geq 0 \text{ και } \frac{1}{e} - f(x) \geq 0$$

$$\text{Άρα } \int_{e-1}^e \left(f(x) - \frac{\ln(e-1)}{e-1} \right) dx \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{e-1}^e f(x) dx - \int_{e-1}^e \frac{\ln(e-1)}{e-1} dx \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{e-1}^e f(x) dx \geq \frac{\ln(e-1)}{e-1} \int_{e-1}^e 1 dx \Rightarrow$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την πρόταση:

Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$$

αφού πρώτα την αποδείξουμε.

$$\Rightarrow \int_{e-1}^e f(x)dx \geq \frac{\ln(e-1)}{e-1} [x]_{e-1}^e \Rightarrow \int_{e-1}^e f(x)dx \geq \frac{\ln(e-1)}{e-1} (e - e + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{e-1}^e f(x)dx \geq \frac{\ln(e-1)}{e-1}$$

$$\text{Και } \int_{e-1}^e \left(\frac{1}{e} - f(x) \right) dx \geq 0 \Rightarrow \int_{e-1}^e \frac{1}{e} dx \geq \int_{e-1}^e f(x)dx \Rightarrow \frac{1}{e} \int_{e-1}^e 1dx \geq \int_{e-1}^e f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e} [x]_{e-1}^e \geq \int_{e-1}^e f(x)dx \Rightarrow \frac{1}{e} (e - e + 1) \geq \int_{e-1}^e f(x)dx \Rightarrow \frac{1}{e} \geq \int_{e-1}^e f(x)dx$$

$$\text{Άρα τελικά } \frac{\ln(e-1)}{e-1} \leq \int_{e-1}^e \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{\ln(e-1)}{e-1} \cdot (e-1) \leq (e-1) \int_{e-1}^e \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{1}{e} \cdot (e-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(e-1) \leq (e-1) \int_{e-1}^e \frac{\ln x}{x} dx \leq 1 - \frac{1}{e}$$

3.5.4. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι

$$2 \int_0^2 f^2(x)dx \geq 2 \int_0^2 f(x)dx - 1$$

$$\text{Είναι } 2 \int_0^2 f^2(x)dx \geq 2 \int_0^2 f(x)dx - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_0^2 f^2(x)dx - 2 \int_0^2 f(x)dx + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_0^2 f^2(x)dx - 2 \int_0^2 f(x)dx + \frac{1}{2} \int_0^2 1dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \int_0^2 f^2(x)dx - 4 \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 1dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^2 (4f^2(x) - 4f(x) + 1)dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 (2f(x) - 1)^2 dx \geq 0 \text{ που ισχύει αφού } (2f(x) - 1)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Προσπαθούμε να φτάσουμε σε

ανίσωση της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \geq 0$

η οποία θα ισχύει εάν $g(x) \geq 0$.

Υπαρξιακή άσκηση με την βοήθεια ανισώσεων ορισμένων ολοκληρωμάτων

3.5.5. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ για την οποία ισχύει $3 \int_0^1 f(x)dx = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi^2$.

Έστω ότι δεν υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi^2$. Τότε η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$, αφού είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $[0,1]$, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,1]$.

Αν λοιπόν $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - x^2 > 0$ για

κάθε $x \in [0,1]$, θα είναι $\int_0^1 [f(x) - x^2] dx > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 x^2 dx > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 > 0 \Leftrightarrow 0 > 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο και αν υποθέσουμε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,1]$

Άρα υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi^2$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η άσκηση έχει λυθεί στη σελίδα 78 με την βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού. Εδώ την λύνουμε με άτοπο με την βοήθεια των ανισώσεων των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Χρήση της παρατήρησης: αν $f(x) \geq 0$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ τότε $f(x) = 0$

3.5.6. Αν για την συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$3 \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx + \beta^3 = \int_{\alpha}^{\beta} 6xf(x)dx + \alpha^3 \text{ να αποδείξετε ότι } f(x) = x \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } 3 \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx + \beta^3 &= \int_{\alpha}^{\beta} 6xf(x)dx + \alpha^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx - 6 \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx + \beta^3 - \alpha^3 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx - 2 \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx + \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} 2xf(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dx &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} [f^2(x) - 2xf(x) + x^2] dx &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - x]^2 dx &= 0 \end{aligned}$$

Αν για την συνάρτηση $g(x) = [f(x) - x]^2$ υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) \neq 0$, αφού $g(x) = [f(x) - x]^2 \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, θα είναι $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - x]^2 dx > 0$ που είναι άτοπο. Άρα αναγκαστικά $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Έχουμε αποδείξει ότι:

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$,

$f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

(η απόδειξη είναι στη σελίδα 69)

3.5.7. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, καθώς και η συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν $f(0)=1$ και $\int_{f(x)}^{f'(x)} (g^2(t) + g(t) + 2)dt = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Αν θέσουμε $h(t) = g^2(t) + g(t) + 2$,
τότε $h(t) > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ αφού $\Delta = -7 < 0$.
Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει να είναι:
 $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x$
Για $x = 0$ θα πάρουμε $f(0) = c \Leftrightarrow c = 1$
οπότε $f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση,
 $f(x) > 0$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ τότε
 $\alpha = \beta$ γιατί διαφορετικά αν $\alpha < \beta$
θα ήταν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$ ενώ αν
 $\alpha > \beta$ θα ήταν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < 0$ που
είναι άτοπο.

Εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano στη συνάρτηση ολοκλήρωμα

3.5.8. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow (0,1)$. Ναδειχτεί ότι η εξίσωση
 $2x - 1 - \int_0^x f(t)dt = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση
 $g(x) = 2x - 1 - \int_0^x f(t)dt$
Είναι $g(0) = -1 - \int_0^0 f(t)dt = -1 < 0$ και
 $g(1) = 2 - 1 - \int_0^1 f(t)dt = 1 - \int_0^1 f(t)dt$
Όμως $0 < f(x) < 1 \Rightarrow \int_0^1 0dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 1dx \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 < \int_0^1 f(x)dx < 1$. Επομένως είναι $g(1) > 0$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να δείξουμε ότι η εξίσωση έχει
ακριβώς μία ρίζα, θα δείξουμε ότι
έχει τουλάχιστον μία ρίζα (εδώ με
θεώρημα Bolzano) και το πολύ μία
ρίζα (εδώ εκμεταλλευόμαστε ότι η
συνάρτηση είναι γνησίως
μονότονη).

Έτσι αφού η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $g(0) \cdot g(1) < 0$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$

Επιπλέον είναι $g'(x) = 2 - f(x) > 0$ (αφού $0 < f(x) < 1 < 2$)

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ κι επομένως θα έχει το πολύ μία ρίζα. Τελικά

η $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 - \int_0^x f(t) dt = 0$ θα έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

Όριο ολοκληρώματος με το κριτήριο παρεμβολής

3.5.9. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση f με

$f(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$f'(t) = \frac{\sqrt{t^2+1} - t \cdot \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1} = \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}} > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως έχουμε :

$$x \leq t \leq x+1 \Leftrightarrow f(x) \leq f(t) \leq f(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$\text{Άρα θα είναι: } \int_x^{x+1} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dt \leq \int_x^{x+1} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt \leq \int_x^{x+1} \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \int_x^{x+1} 1 dt \leq \int_x^{x+1} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt \leq \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} \int_x^{x+1} 1 dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} [t]_x^{x+1} \leq \int_x^{x+1} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt \leq \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} [t]_x^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} (x+1-x) \leq \int_x^{x+1} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt \leq \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} (x+1-x) \Leftrightarrow$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να υπολογίσουμε ένα όριο της

$$\text{μορφής } \lim_{x \rightarrow x_0} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$$

προσπαθούμε να περιορίσουμε τη

συνάρτηση $\int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$ ανάμεσα σε

δυο άλλες συναρτήσεις χρησιμοποιώντας συνήθως την μονοτονία της f και στην συνέχεια χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής.

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq \int_x^{x+1} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt \leq \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} = 1$$

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι επομένως και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt = 1$

3.5.10. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$

$$\text{Είναι: } x \leq t \leq 2x \Leftrightarrow e^x \leq e^t \leq e^{2x} \stackrel{t>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}$$

$$\text{Άρα θα είναι: } \int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x [\ln t]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} [\ln t]_x^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x (\ln 2x - \ln x) \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} (\ln 2x - \ln x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x \ln \frac{2x}{x} \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln \frac{2x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \ln 2 = \ln 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x} \ln 2 = \ln 2$$

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι επομένως και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln 2$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν εργαστούμε όπως στην προηγούμενη άσκηση και περιορίσουμε τη συνάρτηση $\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ χρησιμοποιώντας την μονοτονία της συνάρτησης $f(t) = \frac{e^t}{t}$, δεν θα μπορέσουμε να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε διαφορετικό τρόπο για να περιορίσουμε την συνάρτηση $\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

3.5.11. Να επιλέξετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ Σ□ Λ□

β. Αν η $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 1]$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ Σ□ Λ□

γ. Αν η $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$, ώστε $f(x_0) < 0$ Σ□ Λ□

δ. Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ τότε είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ Σ□ Λ□

ε. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ είναι συνεχής, τότε είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Σ□ Λ□

στ. Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^*$ είναι συνεχής, τότε δεν μπορεί να ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ Σ□ Λ□

ζ. Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ Σ□ Λ□

η. Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ με $f(x_0) < 0$ τότε είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f^4(x) dx > 0$ Σ□ Λ□

θ. Αν οι $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ Σ□ Λ□

ι. Αν η $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και m, M το ελάχιστο και μέγιστο της f αντίστοιχα, τότε ισχύει: $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$ Σ□ Λ□

ια. Αν η $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και γνησίως αύξουσα με $f(\beta) = 0$, τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$ Σ□ Λ□

ιβ. Αν η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, τότε $\int_0^2 f^2(x) dx + 2 \geq \int_0^2 2f(x) dx$ Σ□ Λ□

ιγ. Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει $\int_{\pi}^e f(x) dx < 0$ Σ□ Λ□

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Απόδειξη ανισώσεων

3.5.12. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. \int_0^1 \eta \mu x^2 dx < \frac{1}{3}$$

$$\beta. \int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx < \frac{1}{3}$$

$$\gamma. \int_0^1 e^{-x^2} dx > \frac{2}{3}$$

$$\delta. \int_0^1 x^2 \ln(x+1) dx \leq \frac{1}{4}$$

$$\epsilon. \int_0^{\pi} \ln(2 + \sigma \nu x) dx \leq \pi$$

3.5.13. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [1, 5] \rightarrow [0, +\infty)$. Να δείξετε ότι:

$$\int_2^4 f(x) dx \leq \int_1^5 f(x) dx.$$

3.5.14. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi/4} x^2 \sigma \nu^3 x dx \leq \frac{\pi^3}{192}$

3.5.15. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\pi}{6e} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\sigma \nu x}}{2 + \eta \mu x} dx \leq \frac{\pi e}{2}$

3.5.16. Να δειχτεί ότι: $\int_{1000}^0 (2x^8 + 3x + 2016) dx < \int_{1000}^0 (x^8 + 3x + 2015) dx.$

3.5.17. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e x^e dx \leq \int_1^e e^x dx$

3.5.18. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. x \ln x + 1 \geq x \text{ για κάθε } x > 0$$

$$\beta. \int_1^3 x^x dx \geq e^2 - 1$$

3.5.19. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. \frac{x-1}{x} < \ln x < x-1 \text{ για κάθε } x > 1$$

$$\beta. 1 < \int_2^{e+1} \frac{1}{\ln x} dx < e$$

3.5.20. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 (x^2 - e^{-x^2}) dx < 2 - \frac{2}{e}$.

3.5.21. Να δείξετε ότι $2\sqrt{e} \leq \int_0^1 \left(e^{x^2} + \frac{e}{e^{x^2}} \right) dx \leq 1 + e$

3.5.22. Να δείξετε ότι $0 < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^9}} dx < \frac{1}{20}$.

3.5.23. Να δείξετε ότι για $x > 0$ ισχύει $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{6}$ και ότι θα είναι $\int_1^2 \frac{\eta\mu x}{x} dx > \frac{11}{18}$.

3.5.24. Να δείξετε την ανισότητα $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x^2} dx < e - 1$.

3.5.25. Να δείξετε ότι: $3 - 3e^4 \leq \int_{-1}^2 (\sqrt{x^2+1} - e^{x^2}) dx \leq 3(\sqrt{5} - 1)$.

3.5.26. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0, 2]$ τέτοιο, ώστε: $\int_0^2 xf(x) dx = 2f(\xi)$

3.5.27. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$

β. $\int_0^1 f(x) dx < f(1)$

3.5.28. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x) dx \leq \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x) dx$.

3.5.29. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [\kappa, \lambda]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$. Να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx \leq \kappa\lambda(\alpha - \beta)$

3.5.30. Αν η συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(1) \neq 1$, να αποδείξετε ότι: $\int_0^2 f^2(x)dx + 2 > 2 \int_0^2 f(x)dx$

3.5.31. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι: $\int_0^2 \frac{f(x)}{1 + f^2(x)} dx \leq 1$

3.5.32. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, να αποδείξετε ότι: $\int_1^2 [2x^2 f(x) - xf^2(x)] dx \leq \frac{15}{4}$

3.5.33. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. \quad t^2 \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx - 2t \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g^2(x)dx \geq 0 \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

$$\beta. \quad \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g^2(x)dx$$

3.5.34. Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι: $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$

3.5.35. Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι: $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \right| = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$

Υπαρξιακή άσκηση με την βοήθεια ανισώσεων ορισμένων ολοκληρωμάτων

3.5.36. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi$.

3.5.37. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow (0, +\infty)$ με $3 \int_0^1 f(x)dx = 1$. Να δείξετε

ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi$.

Χρήση της παρατήρησης: αν $f(x) \geq 0$ και $\int_a^b f(x)dx = 0$ τότε $f(x) = 0$

3.5.38. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να είναι

$f(x) \geq \sin x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\int_0^{\pi/2} f(x)dx = 1$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sin x$,

για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3.5.39. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F μια αρχική της στο $[0,1]$. Αν ισχύει: $\int_0^1 (f^2(x) + 6F(x))dx + 3 = 6F(1)$ να βρείτε τον τύπο της f .

3.5.40. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, καθώς και η συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν $f(0) = 0$ και $\int_{e^{x-f(x)}}^{2f'(x)} (g^2(t) + e^t)dt = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

3.5.41. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, καθώς και η συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν $f(0) = -3$ και

$$\int_{f(x) \cdot f'(x)}^{e^{2x} + x} (e^t - t) \cdot (g^2(t) + 3) dt = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης } f.$$

Εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano στη συνάρτηση ολοκλήρωμα

3.5.42. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{-x} f(x) \geq 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t) dt = e^x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

3.5.43. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,3] \rightarrow (1,3)$. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t) dt = 4x - 3$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,3)$.

3.5.44. Αν η συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow (0,1)$ είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x - \int_0^x f(t) dt = 2$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Όριο ολοκληρώματος με το κριτήριο παρεμβολής

3.5.45. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt \quad \beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + 4} dt \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{x}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \quad \delta. \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} e^{1/t} dt$$

3.5.46. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$

Επιπλέον ασκήσεις για περισσότερη εξάσκηση

3.5.47. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. 1 \leq \frac{1}{e^3 - e^2} \int_e^{e^2} \frac{x}{\ln x} dx \leq \frac{e}{2} \quad \beta. \frac{\pi^2}{9} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\eta \mu x} dx \leq \frac{\pi^2}{6}.$$

3.5.48. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \ln x dx > \int_{1/e}^1 \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

3.5.49. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot 6^x - 9^x - 4^x$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. f(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \beta. \frac{10}{\ln 6} < \frac{8}{\ln 9} + \frac{3}{\ln 4}$$

3.5.50. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [-1, 1]$ είναι $0 \leq \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^x \frac{2t^2 - 3t + 2}{t^2 + 1} dt \right] dx \leq 8$.

3.5.51. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1, f(1) = 2$ και

$$f'(x) - 2f(x) < 2 \text{ για κάθε } x \in [0, 1]. \text{ Να δείξετε ότι } \frac{1}{2} - \frac{3}{2e^2} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e^2 - 2$$

3.5.52. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και τέτοια ώστε να είναι $f(0) = 0, f(1) = 1$ και $f(x) + f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

$$\text{Να δείξετε ότι: } \int_0^1 e^{x^2} [f(x) + f'(x)] dx \leq e$$

3.5.53. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow [\alpha, \beta]$, όπου $0 < \alpha < \beta$. Να δείξετε ότι:

$$\int_0^1 f(x) dx + \alpha \beta \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \alpha + \beta$$

3.5.54. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και

$$\int_0^1 f^2(x) dx + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 8. \text{ Να αποδείξετε ότι } f(1) \in [-3, 3]$$

3.5.55. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 1$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \sin \xi$.

3.5.56. Έστω συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $\int_1^e f(x) dx = e^e - e$. Να

δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, e)$ με $f(\xi) = e^\xi$.

3.5.57. Δίνονται συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$\int_0^1 [xf^2(x^2) + xg^2(x^2) - f(x)g(x)] dx = 0$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

3.5.58. Αν η συνάρτηση $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύουν

$f(0) = 1$, $f(3) = 10$ και $\int_0^3 f(x)(f''(x) - 4) dx + f'(0) + 84 = 10f'(3)$, να δείξετε ότι

$f(x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in [0, 3]$.

Σύνθετες ασκήσεις

3.5.59. Έστω συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε

ότι: $\int_{\kappa-1}^{\kappa} f(x) dx \leq f(\kappa) \leq \int_{\kappa}^{\kappa+1} f(x) dx$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$

3.5.60. Έστω συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε

ότι $2016 f(0) < f(0) + f(1) + \dots + f(2015) < \int_0^{2016} f(x) dx$ και

$\int_0^{2016} f(x) dx < f(1) + f(2) + \dots + f(2016) < 2016 f(2016)$

3.5.61. Έστω παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, ($\alpha > 0$) με

$$f(0) = f'(0) = 1$$

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$.

β. Να δείξετε ότι $\int_0^{\alpha} f(x)dx > \alpha$

3.5.62. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[1, 2]$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^2 2f(x)dx < f'(2) + 2f(1).$$

3.5.63. Έστω παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

$$\int_0^2 f(x)dx \leq 2f(0) + 2f'(2)$$

3.5.64. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

α. $f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

β. $2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha)$

3.5.65. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) > 2x$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι :

α. $\int_0^1 f(x)dx > \frac{1}{3}$

β. $f(1) > 1$

γ. Υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $3(1 - \xi) \int_0^1 f(x)dx = \xi^3 f(\xi) - 2\xi + 1$

3.5.66. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f(1) = 4$ και $f'(x) > 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α. $xf'(x) \geq f(x)$ για κάθε $x \geq 0$

β. $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 2$

3.5.67. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) > 3x^2$ για κάθε $x \in [0, 2]$. Να δείξετε ότι:

α. $\int_0^2 f(x)dx > 4$

β. $f(2) > 7 + f(1)$

γ. Υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $(2 - \xi) \cdot \left(\int_0^2 f(x)dx - 4 \right) = \xi \cdot f(\xi) - 2\xi^3$

3.5.68. Δίνεται παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) > 2$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2} f'(1)$.

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

γ. $f(2x) - f(x) > 2x$ για κάθε $x > 0$.

δ. $\int_1^4 f(x)dx - 2 \int_1^2 f(x)dx > 6$

3.5.69. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $f(2) = 0$, $f(3) = 3$, $f'(3) = 1$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [2, 3]$. Να δείξετε ότι:

α. Η f είναι γνησίως μονότονη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. $f(x) \geq 3(x - 2)$ για κάθε $x \in [2, 3]$.

γ. $\int_2^3 f(x)dx \geq \frac{3}{2}$

3.5.70. Η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη με

$$f(\alpha) = f(\beta) = K, \text{ να δείξετε ότι } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq K(\beta - \alpha)$$

3.5.71. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

α. $2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq f(x) + f(\alpha + \beta - x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

β. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq (\beta - \alpha)f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

3.5.72. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ και $f''(x) + 2f'(x) + f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $f(x) \geq xe^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. $\int_0^1 x^{\nu} [f(x) - (\nu + 1)e^{-x}] dx \geq -\frac{1}{e}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$.

3.5.73. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν

$$f(1) = e \text{ και } f(x) = e^x - xf'(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

α. Να βρείτε τον τύπο της f .

β. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$

γ. Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 f(x) dx \geq \frac{3e^2}{8}$

3.5.74. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$

και $f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνεχής συνάρτηση

$$g : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 1].$$

α. Να βρείτε τον τύπο της f .

β. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $2\xi - \int_0^{\xi} \frac{g(t)}{1 + f^2(t)} dt = 1$

3.5.75. Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια κοίλη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι :

α.
$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} > \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta).$$

β.
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

3.5.76. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 = \int_0^1 x f(x^2) dx - \int_0^1 x^3 f(x^4) dx$$

α. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi$